Tematy finału konkursu „Bieg po indeks” organizowanego przez Politechnikę Koszalińską Edycja 2015

Z poniższego zestawu 15 zadań należy wybrać dowolnych 5 zadań. Każde z wybranych zadań uczestnik konkursu rozwiązuje na odrębnej kartce wpisując w jej nagłówku imię i nazwisko oraz numer rozwiązywanego zadania. W rozwiązaniach zadań należy przedstawić tok rozumowania i obliczenia prowadzące do ostatecznego wyniku oraz ewentualne rysunki.

Ocenie przez komisję konkursową podlegać będzie tylko ta piątka zadań, która została zadeklarowana do sprawdzenia w ankiecie, jaką uczestnik otrzymał podczas trwania finału konkursu. Każde z wybranych zadań ocenione zostanie w skali 0 – 20 punktów. Maksymalna liczba punktów możliwych do zdobycia – 100.

O kolejności na liście laureatów, obejmującej 30 nazwisk, decydować będzie liczba zdobytych punktów. Pod uwagę będą brani tylko ci uczestnicy finału, którzy uzyskali co najmniej 50 punktów.

Czas trwania finału - 120 minut

Zadania z matematyki

Zadanie 1.
Zinterpretować geometrycznie równania układu (*a* oznacza parametr):

$$\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + (y-a)^2 = 1. \end{cases}$$

Posługując się otrzymaną interpretacją określić liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru *a*.

Zadanie 2.
Trzy liczby, których suma jest równa 3, tworzą rosnący ciąg arytmetyczny, a ich kwadraty tworzą ciąg geometryczny. Znaleźć te liczby.

Zadanie 3.
W kulę o promieniu $R = 1$ wpisano stożek, którego objętość stanowi $\frac{1}{4}$ objętości kuli. Obliczyć wysokość stożka oraz promień podstawy.

Zadanie 4.
Rzucamy 8 razy symetryczną monetą. Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń:

a) reszka wypadła dokładnie 4 razy,
b) reszka wypadła więcej razy niż orzeł,
c) przynajmniej dwa razy pod rząd moneta upadła tą samą stroną.

Zadanie 5.
Obliczyć sumę wszystkich pierwiastków równania:

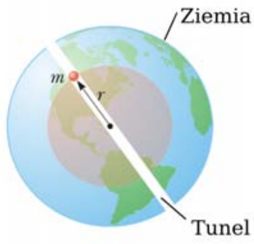
$$4\cos^2 x = 3$$

należących do przedziału $(-10\pi;\ 20\pi)$.

Zadania z fizyki

Zadanie 1.

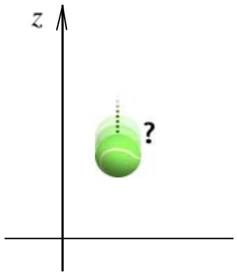
Załóżmy, że dysponujemy szybem przechodzącym przez środek Ziemi i przechodzącym na antypody. Załóżmy też, że można pominąć opór powietrza. Skądinąd wiadomo, że siła ciężkości (poniżej powierzchni Ziemi) jest proporcjonalna do odległości od środka Ziemi.



a) Po jakim czasie wrzucony do tunelu kamień osiągnie drugi koniec otworu?
b) Jaka będzie maksymalna prędkość kamienia?

Zadanie 2.

Z wysokości 1 m spada swobodnie piłeczka po czym następuje idealnie sprężyste odbicie. Piłeczka leci więc pionowo ku górze, osiąga wysokość maksymalną i znów zaczyna spadać. Wykreśl, jak możesz najdokładniej, zależności od czasu:

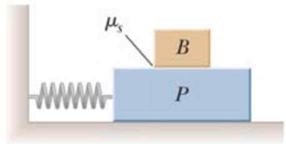


a) położenia z,
b) prędkości v_z,
c) przyspieszenia a_z piłki.

Użyj wspólnej skali (osi) czasu.

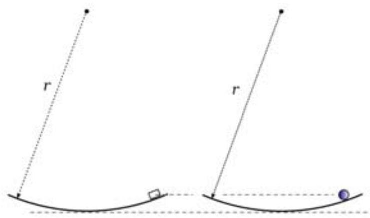
Zadanie 3.

Układ dwóch klocków jak na rysunku wykonuje drgania swobodne o częstotliwości 1,5 Hz. Powierzchnia stołu pozbawiona jest tarcia natomiast pomiędzy klockami występuje tarcie o współczynniku 0,3. Jaka jest maksymalna amplituda drgań przy której klocek B nie przesuwa się jeszcze względem klocka P?



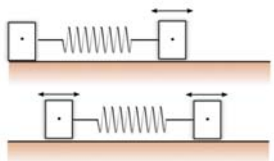
Zadanie 4.

W misie o sferycznym kształcie i promieniu 60 cm ślizga się kostka lodu o masie 30 g oraz przetacza się kulka o takiej samej masie. Jaki będzie okres drgań w obydwu przypadkach?



Zadanie 5.

Dwa klocki o masie m oraz sprężyna o współczynniku sprężystości k tworzą układ drgający. Raz jeden klocek jest zamocowany a drugi porusza się swobodnie, a w drugim przypadku obydwa klocki poruszają się swobodnie. Jaka jest częstotliwość drgań w obu wypadkach? Czy różnią się one od siebie?



Dla przypomnienia kilka wzorów:

$$x(t) = A\cos(\omega t); \quad v(t) = -A\omega\sin(\omega t); \quad a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t); \quad \omega = 2\pi f; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}; \quad \omega^2 = \frac{g}{l};$$

$$I = mr^2; \quad I = \frac{2}{5}mR^2; \quad F_t = \mu F_n; \quad F = ma; \quad F = -kx; \quad E = \frac{mv^2}{2}; \quad E = \frac{kx^2}{2}; \quad E = mgh.$$

Zadania z informatyki

Zadanie 1.
Poniżej przedstawiono kod, który oblicza pewną funkcję matematyczną. Jaka to funkcja i jaka będzie zwracana wartość *tmp* jeżeli przyjmiemy, że każdy element macierzy jest równy 1?

```
int funkcja(int macierz[3][3])
{
   int tmp=0;
   for(int i=0; i<3; i++)
    {int tmp1=1;
     for(int j=0; j<3; j++)
      tmp1*=macierz[(i+j)%3][j];
     tmp+=tmp1;
    }
   for(int i=0; i<3; i++)
    {int tmp1=1;
     for(int j=0; j<3; j++)
      tmp1*=macierz[(i+j)%3][2-j];
     tmp-=tmp1;
    }
    return tmp;
}
```

Zadanie 2.
Opracować algorytm generujący tablicę danych [n *x* n], w której wartości "1" są wpisane do komórek znajdujących się po obu przekątnych, a reszta komórek jest wyzerowana (jak na załączonym rysunku). Dana wejściowa do algorytmu to rozmiar tablicy n. Odpowiedź przedstawić w postaci kodu w dowolnym języku programowania, lub w postaci pseudokodu, lub w postaci schematu blokowego.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Struktura danych wygenerowana dla n = 10

Zadanie 3.
Zbudowany przez studentów plażowy robot-żółw przemieszcza się po piasku, zostawiając po sobie liniowy ślad. Robot może wykonywać (i powtarzać) tylko dwa polecenia:

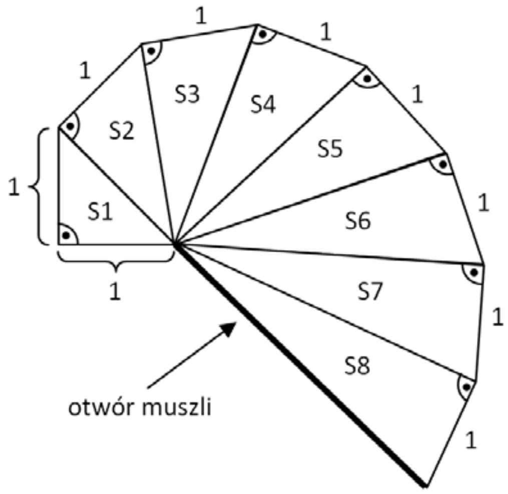
- *Naprzód n*, gdzie n – liczba kroków żółwia;
- *W_prawo m*, gdzie m – liczba stopni na które żółw zawraca zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Instrukcja *Powtórz (k; Polecenie_1; Polecenie_2)* oznacza, że żółw powtórzy k razy parę poleceń: Polecenie_1 i Polecenie_2.
Domyślny program studenckiego żółwia wygląda następująco:

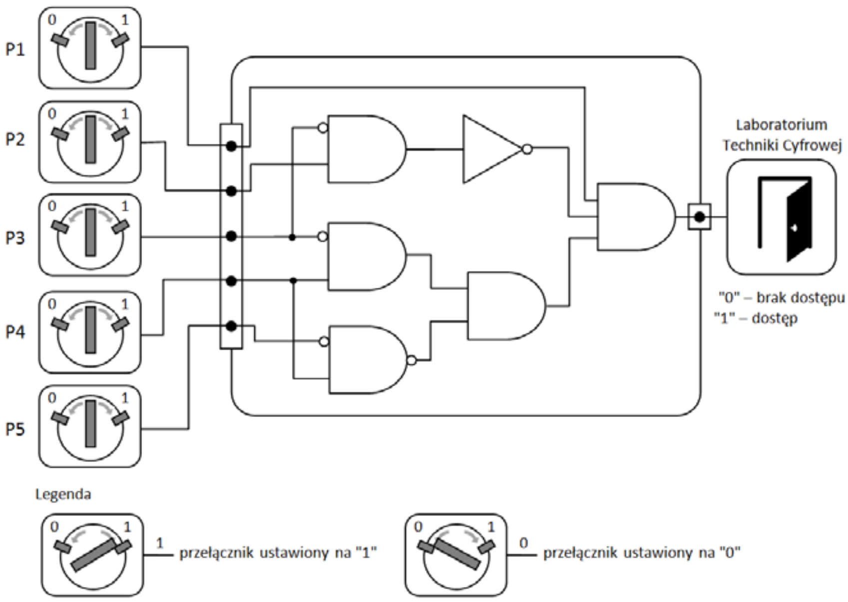
Powtórz (5; Naprzód 10; W_prawo 72);

Jaką figurę studencki żółw wykreśli domyślnie na piasku?

Zadanie 4.
Na rysunku przedstawiono "dwuwymiarową muszlę", składającą się z ośmiu segmentów oznaczonych symbolami S1, …, S8. Każdy z segmentów jest trójkątem prostokątnym, w którym krótsza przyprostokątna ma długość 1 (wyjątek stanowi S1 gdzie obie przyprostokątne mają długość 1).
Napisz program pozwalający wyznaczyć rozmiar otworu muszli (długość przeciwprostokątnej ostatniego segmentu) składającej się z *n* segmentów.



Zadanie 5.
Drzwi do Laboratorium Techniki Cyfrowej są zamykane na elektroniczny zamek szyfrowy. Otrawcie drzwi wymaga ustawienia w odpowiedniej pozycji pięciu przełączników P1–P5. Przełączniki mają dwie pozycje oznakowane jako "0" i "1". Schemat układu logicznego wykorzystywanego do otwarcia zamka jest wyświetlany na ekranie obok przełączników i zmienia się raz na dzień. W dniu finału BPI 2015 układ logiczny wygląda jak na załączonym rysunku.
Jakie pozycje przełączników P1–P5 pozwolą dzisiaj wziąć udział studentom w zajęciach z Techniki Cyfrowej?



POWODZENIA!